



ce
pre
UNI

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1

Álgebra

TEMA: Conjuntos II
CONJUNTO POTENCIA



1. **Leyes del Álgebra de conjuntos.**
2. **Conjunto potencia, propiedades.**
3. **Proposiciones y conjuntos.**
4. **Producto cartesiano.**
5. **Cardinalidad de un conjunto finito.**
6. **Conjuntos numéricos.**
7. **Cuantificadores.**
 - **Universal y existencial.**
 - **Negación de cuantificadores.**

ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

1a. $A \cup A = A$

1b. $A \cap A = A$

2a. $A \cup B = B \cup A$

2b. $A \cap B = B \cap A$

3a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

3b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5a. $A \cup A^c = U$

5b. $A \cap A^c = \emptyset$

6a. $A \cup U = U$

6b. $A \cap U = A$

7a. $A \cup \emptyset = A$

7b. $A \cap \emptyset = \emptyset$

Leyes de Morgan

8a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

8b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Leyes de Absorción

9a. $A \cup (A \cap B) = A$

9b. $A \cap (A \cup B) = A$

ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Falsa Absorción

$$10a. A \cup (A^C \cap B) = A \cup B$$

$$10b. A \cap (A^C \cup B) = A \cap B$$

Negación 11. $(A^C)^C = A$

$$12. U^C = \emptyset$$

$$13. \emptyset^C = U$$

Diferencia

$$14. A \setminus B = A \cap B^C \quad 15. A \setminus B = (A \cup B) \setminus B \quad 16. A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

Diferencia Simétrica

$$17. A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$18. A \triangle A = \emptyset ; \emptyset \triangle A = A$$

$$19. A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$$

$$20. A \triangle B = B \triangle A$$

$$21. (A \triangle B)^C = (A^C \triangle B) = (A \triangle B^C) \quad 22. A^C \triangle B^C = A \triangle B$$

$$23. A \triangle B = A \triangle C \rightarrow B = C$$

CONJUNTO POTENCIA

Definición: El conjunto potencia de un conjunto A , denotado por $P(A)$, es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A , esto es:

$$P(A) = \{X / X \subset A\}$$

Observaciones

$$\diamond X \in P(A) \Leftrightarrow X \subset A$$

$$\diamond A \in P(A)$$

$$\diamond \emptyset \in P(A)$$

$$\diamond P(A) \neq \emptyset$$

Ejemplos:

- ❖ Si $A = \emptyset$, entonces $P(A) = P(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
- ❖ Si $B = \{\emptyset\}$, entonces $P(B) = P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
- ❖ Si $C = \{5\}$, se tiene que $P(C) = \{\emptyset; \{5\}\}$.
- ❖ Si $D = \{3; 5\}$, entonces $P(D) = \{\emptyset; \{3\}; \{5\}; \{3; 5\}\}$.
- ❖ Si $E = \{\emptyset; 5\}$, entonces $P(D) = \{\emptyset; \{\emptyset\}; \{5\}; \{\emptyset; 5\}\}$.

PROPIEDADES

Dados los subconjuntos A y B respecto a un universo $\mathbb{U}$, se cumple:

$$\diamond P(A) = \{\emptyset\} \Leftrightarrow A = \emptyset$$

$$\diamond P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$$

$$\diamond P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

$$\diamond A \subset B \leftrightarrow P(A) \subset P(B)$$

Ejercicio 1:

Si $A = \{\emptyset; \{\emptyset\}; \{\{\emptyset\}\}; \{a; b\}; b\}$ indique el valor de verdad de

I. $P(\emptyset) \in P(A)$

II. $\{a; b\} \in P(A)$

III. $\{P(P(\emptyset)); \{b\}\} \subset P(A)$

Resolución:

I. $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

(V)

II. $a \in A \wedge b \notin A \rightarrow \{a; b\} \not\subset A \rightarrow \{a; b\} \notin P(A)$

(F)

III. $P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subset A \rightarrow P(P(\emptyset)) \in P(A)$

(V)

$$b \in A \rightarrow \{b\} \subset A \rightarrow \{b\} \in P(A)$$

$$\text{Luego } \{P(P(\emptyset)); \{b\}\} \subset P(A)$$

PROPOSICIONES Y CONJUNTOS

FUNCIÓN PROPOSICIONAL

Definición: Una función proposicional sobre un conjunto A , es cualquier enunciado p que depende de una variable x , se denota por $p(x)$, de tal forma que: Si x se reemplaza por cualquier elemento $a \in A$, entonces $p(a)$ es una proposición lógica.

Ejempl

El enunciado

$$p(x) : x < 5$$

es una función proposicional sobre $A = \mathbb{R}$, pues:

- ❖ Si x se reemplaza por a cuando $a < 5$ entonces $p(a)$ es una proposición lógica verdadera.
- ❖ Si x se reemplaza por a cuando $a \geq 5$ entonces $p(a)$ es una proposición lógica falsa.

Ejercicio 3:

Sean los conjuntos.

$$M = \{x \in R / x \geq 1 \leftrightarrow x^2 \leq 4\},$$

$$N = \{x \in R / x < 1 \Delta x^2 > 9\}$$

Determine $M \cap N$

Resolución:

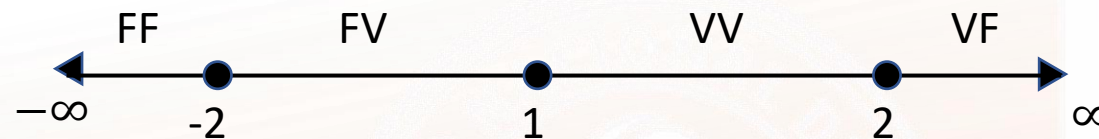
$$V \leftrightarrow V \equiv V$$

$$F \leftrightarrow F \equiv V$$

$$V \Delta F \equiv V$$

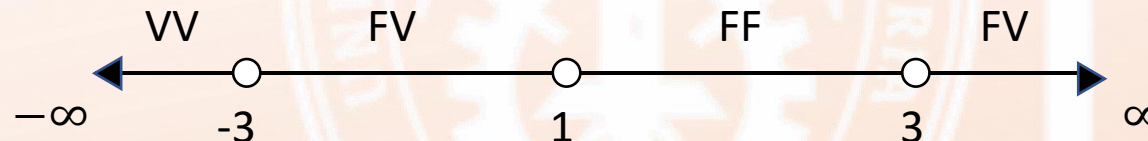
$$F \Delta V \equiv V$$

a) Datos conjunto M: $x \geq 1$; $-2 \leq x \leq 2$



$$M = \langle -\infty ; -2] \cup [1 ; 2]$$

b) Datos conjunto N: $x < 1$; $x > 3$ o $x < -3$



$$N = [-3 ; 1 > \cup < 3 ; \infty >$$

Rpta: $M \cap N = [-3 ; -2]$

PRODUCTO CARTESIANO

El producto cartesiano de los conjuntos A y B y es el conjunto

$$A \times B = \{(a; b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo

Se realiza un experimento consistente en lanzar al aire primero un dado seguidamente una moneda, el producto cartesiano de los conjuntos $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ y $B = \{C; S\}$, representa el conjunto de los diferentes resultados que se pueden obtener

$$A \times B = \{(1; C), (1; S), (2; C), (2; S), \dots, (6; C), (6; S)\}$$

PRODUCTO CARTESIANO

Cuando se definen coordenadas cartesianas en el plano, cada punto se representa por un par ordenado $(x; y)$ donde x es la abscisa e y la ordenada. Esto identifica al denominado plano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Dados los subconjuntos A , B y C respecto a un universo $\mathbb{U}$, se cumple:

1. $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

2. En general

❖ $A \times B \neq B \times A$

❖ $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$

CARDINAL DE UN CONJUNTO FINITO

El cardinal de un conjunto finito A es el número de elementos que tiene, se denota por $n(A)$.

Ejemplo

$$n(\emptyset) = 0, \quad n(P(\emptyset)) = 1, \text{ en general } n(P(A)) = 2^{n(A)}.$$

Si A , B y C son conjuntos finitos, se cumple:

$$\diamond n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

$$\diamond n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

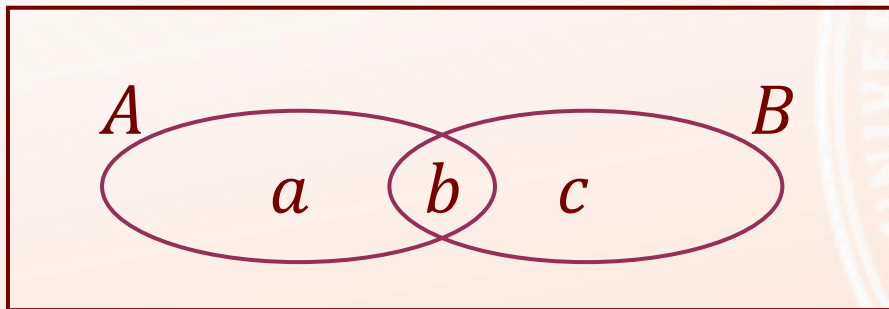
$$\diamond \text{ Si } A \cap B = \emptyset, \text{ entonces } n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

$$\diamond n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C)$$

Ejercicio 4:

Los conjuntos A y B contenidos en el universo $\mathbb{U}$ son tales que: $n(A \cup B) = 50$; $n(A \setminus B) = 30$; $n(B \setminus A) = 10$, determinar $n(A) + n(B)$.

Resolución:



$$n(A \cup B) = a + b + c = 50$$

$$n(A \setminus B) = a = 30$$

$$n(B \setminus A) = c = 10$$

$$n(A) + n(B) = a + 2b + c = 60$$

Ejercicio:

Se tienen 3 conjuntos A , B y C cuyos números cardinales son consecutivos, además se sabe que: $n[P(A)] + n[P(B)] + n[P(C)] = 384$. Determinar el número de elementos que puede tener como máximo el conjunto potencia de $(A \cup B \cup C)$.

Resolución: $n(A) = x; n(B) = x + 1; n(C) = x + 2$

Determinar el número de elementos máximo, entonces A , B y C son disjuntos 2 a 2.

$$\text{Dato: } 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 384 \rightarrow x = 6$$

$$\boxed{x}$$

 A

$$\boxed{x + 1}$$

 B

$$\boxed{x + 2}$$

 C

$$n(A \cup B \cup C) = 3x + 3 = 21$$

$$\therefore n[P(A \cup B \cup C)] = 2^{21} = 8^7$$

Ejercicio 5:

Si $A \subset B$ simplificar ; $\{[(B \cup A) \cap (B^c \cap C)] \cup A^c\} \cup B^c$

Resolución:

$$\text{Si } A \subset B \quad \begin{cases} \rightarrow A \cap B = A \\ \rightarrow A \cup B = B \end{cases}$$

$$\left\{ \left[\underbrace{(B \cup A)}_{\downarrow} \cap (B^c \cap C) \right] \cup A^c \right\} \cup B^c$$

$$\left\{ \left[\underbrace{B \cap (B^c \cap C)}_{\emptyset} \right] \cup B^c \right\} \cup B^c$$

$$\emptyset \cup (A^c \cup B^c)$$

$$\underbrace{(A \cap B)}_{A^c}'$$

$$A^c$$

CUANTIFICADORES

Definición: ❖ El cuantificador universal se define como la expresión: “**Para todo**” y se denota por $\forall$.

❖ El cuantificador existencial se define como la expresión: “**Existe**” y se denota por $\exists$.

Si $p(x)$ es una función proposicional en A , la proposición:

❖ $\forall x \in A, p(x)$ será verdadera si $p(a)$ es verdadera para cada elemento a de A .

❖ $\exists x \in A / p(x)$ será verdadera si $p(a)$ es verdadera para algún elemento a de A .

CUANTIFICADORES

Ejemplo:

Sea $A = \{1; 2; 3\}$, indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones

$$\diamond \forall x \in A, x \geq 1$$

$$\diamond \forall x \in A, x^2 < 9$$

Resolución

$\diamond \forall x \in A, x \geq 1$ es verdadera pues $x \geq 1$ es verdadera para cada elemento de A .

$\diamond \forall x \in A, x^2 < 9$ es falsa pues $x^2 < 9$ es falsa para $x = 3$.

CUANTIFICADORES

Ejemplo:

Sea $A = \{0; 1; 3\}$, indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones

$$\diamond \exists x \in A / x^3 = 1$$

$$\diamond \exists x \in A / x^2 = x + 1$$

Resolución

$\diamond \exists x \in A / x^3 = 1$ es verdadera pues si $x = 1$ se cumple que $x^3 = 1$

$\diamond \exists x \in A / x^2 = x + 1$ es falsa pues $x^2 = x + 1$ es falsa para cada elemento de A .

COMBINACIÓN DE CUANTIFICADORES

Sean A y B dos conjuntos diferentes de vacío y $p(x, y)$ una función proposicional de dos variables.

Tenemos:

$$\forall x \in A, \forall y \in B : p(x, y)$$

$$\forall x \in A, \exists y \in B \mid p(x, y)$$

$$\exists x \in A \mid \forall y \in B : p(x, y)$$

$$\exists x \in A \mid \exists y \in B \mid p(x, y)$$

¿Son equivalentes?

$$\forall x \in A, \exists y \in B \mid p(x, y) \quad \text{y} \quad \exists x \in A \mid \forall y \in B : p(x, y)$$

NEGACIÓN DE CUANTIFICADORES

$$\sim(\forall x \in A, p(x)) \equiv \exists x \in A / \sim p(x)$$

$$\sim(\exists x \in A / p(x)) \equiv \forall x \in A, \sim p(x)$$

Ejemplo:

La negación de

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \underbrace{\forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}_{p(x)}$$

es la proposición equivalente

$$\exists \varepsilon > 0 / \forall \delta > 0, \underbrace{\exists x \in D / 0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon}_{\sim p(x)}$$

Ejercicio 1:

Dadas las siguientes proposiciones:

I. $[\exists x \in \mathbb{N} / x + 2 = 5] \wedge [\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > x]$

II. $[\forall a \in \mathbb{Z}, -a < 0] \vee [\exists x \in \mathbb{Z} / -x = x]$

III. $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \quad / \quad x + y \leq 7$

¿Cuáles son los valores de verdad de sus negaciones en ese orden?

A) FFF

B) FVV

C) FVF

D) VFF

E) VFV

Resolución:

(F) I. $[\exists x \in \mathbb{N}; \quad x = 3 \quad (V) \quad] \quad \wedge \quad [\forall x \in \mathbb{N}, \quad x = 1 \quad (F)]$

(V) II. $[\forall a \in \mathbb{Z}, \quad a = -3 \quad (F)] \quad \vee \quad [\exists x \in \mathbb{Z}, \quad x = 0 \quad (V)]$

(V) III. $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad \exists y \in \mathbb{Z} \quad / \quad x + y \leq 7$

Rpta: B